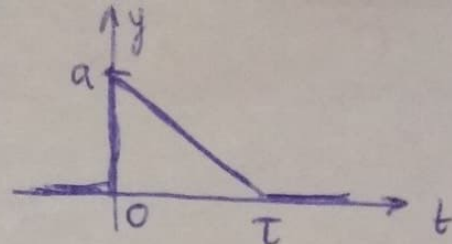


$$\boxed{5.8.} \quad y(t) = \begin{cases} a(1 - t/\tau), & t \in [0, \tau] \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > \tau \end{cases}$$



Спектр сигнала:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{2\pi} \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-i\omega t} dt =$$

$$[\text{замена } x = t - \tau, dx = dt] = -\frac{a}{2\pi\tau} \int_{-\tau}^0 x e^{-i\omega x} dx e^{-i\omega\tau} =$$

$$[\text{по частям}] = -\frac{a}{2\pi\tau} e^{-i\omega\tau} \frac{1}{-i\omega} \left(x e^{-i\omega x} \Big|_{-\tau}^0 - \frac{1 - e^{-i\omega\tau}}{-i\omega} \right) =$$

$$= \frac{a e^{-i\omega\tau}}{2\pi i\omega\tau (-i\omega\tau)} (e^{-i\omega\tau} (1 - i\omega\tau) - 1) = \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega\tau)^2} ((1 - i\omega\tau)e^{-i\omega\tau} - 1)$$

$$G(\omega) = (2\pi)^2 |S(\omega)|^2 = \frac{a^2}{(\omega\tau)^4} ((\cos\omega\tau + \omega\tau \sinh\omega\tau - 1)^2 +$$

$$+ (\sinh\omega\tau - \omega\tau \cos\omega\tau)^2) = \frac{a^2}{(\omega\tau)^4} ((\omega\tau)^2 + 2(1 - \cos\omega\tau - \omega\tau \sinh\omega\tau))$$

на рис. 1. нарисовано $\frac{G(\omega)}{a^2}$ в зав-ти от $\omega\tau$

Полная ширина спектр. плотности мощности

$$\Delta\omega \sim \frac{14}{\tau} \rightarrow \text{макс. частота } \nu_{\max} \sim \frac{7}{2\pi\tau} \approx \frac{1,1}{\tau}$$

Дискретный спектр:

$$S_h(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y(t_j) \exp(-i \frac{2\pi}{N} jn) = \frac{a}{N} \sum_{j=0}^{N'} \left(1 - j \frac{h}{\tau}\right) \exp(-i \frac{2\pi}{N} jn),$$

где N' - мин. номер, при кот. $N' \frac{h}{\tau} \geq 1$

1) $h = 0,05\tau$. Выберем $T = 64h = 3,2\tau > 3\tau$ (усл. выполнено)

Тогда $N = 64$, частота Найквиста $\nu_N = \frac{1}{2h} = \frac{10}{\tau}$

2) $h = 0,1\tau \rightarrow T = 32h = 3,2\tau \rightarrow N = 32$

$$\nu_N = \frac{1}{2h} = \frac{5}{\tau}$$

$$3) h = 0,2\tau \rightarrow T = 16h = 3,2\tau \rightarrow N = 16, \quad \nu_N = \frac{1}{2h} = 2,5/\tau$$

$$4) h = 0,4\tau \rightarrow T = 8h = 3,2\tau \rightarrow N = 8, \quad \nu_N = \frac{1}{2h} = \frac{1,25}{\tau}$$

~~Значения~~ Графики для спектральных плотностей мощности $\frac{G_h(n)}{a^2} = \frac{|S_h(n)|^2}{a^2}$ приведены на рис. 2, 3, 4, 5

Все графики отнормированы, на них $n = 3,2\nu\tau$,
где ν - частота сигнала, т.е. $\nu = \frac{n}{3,2\tau}$